تحليل متجهات
سنة ثانية رياضيات

الفصل الأول
المتجهات والعمليات عليها

- المتجه يتحدد بثلاثة عناصر: الجهة - الطول - المنحى
- عندما نتحدث عن الشعاع المقيد $\overrightarrow{AB}$ فإننا نعني شعاعاً وحيداً مبدؤه A ومنتهاه B، أما عندما نتحدث عن الشعاع الطليق $\overrightarrow{AB}$ فإننا نعني بذلك الشعاع المقيد $\overrightarrow{AB}$ وأي شعاع آخر اتفق معه بالطول والمنحى والاتجاه.

- $A=(a_1, a_2, a_3)$ ← إحداثيات المتجه A

المتجه الصفري $O=(0,0,0)$

معكوس المتجه A هو $-A=(-a_1,-a_2,-a_3)$

- طويلة المتجه A هو عدد حقيقي موجب $|A|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$

واضح أن $|A|\geqslant 0$ ويكون $|A|=0 \Leftrightarrow A=0$

- إذا كان $|A|=1$ نسمي المتجه A متجه وحدة.

اقرأ نظري "هنا اذكر الأفكار الأساسية تماماً فقط"

- التعريف الهندسي للمتجه:

$A(a_1,a_2,a_3)$

اتجاه أي متجه يتعين بالزاوية

$\theta=\arctan\frac{a_2}{a_1}$

جيوب تمام التوجيه:

$\cos\alpha=\frac{a_1}{|A|}$

$\cos\beta=\frac{a_2}{|A|}$

$\cos\gamma=\frac{a_3}{|A|}$

ويكون: $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

- طولية الشعاع $\overrightarrow{AB}$:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

حيث :

$$\overrightarrow{AB} = \left((x_B - x_A), (y_B - y_A), (z_B - z_A)\right)$$

- مثال 1 أوجد مركبات وطولية المتجه A الممثل بالقطعة المستقيمة الموجهة PQ

حيث $P = (3, -2, 2)$ $\quad Q = (-1, 1, 4)$

الحل :

$$A = (x_Q - x_P, y_Q - y_P, z_Q - z_P)$$

$$= (-1-3, 1-(-2), 4-2) \Rightarrow A = (-4, 3, 2)$$

$$|A| = \sqrt{(-4)^2 + (3)^2 + (2)^2} = \sqrt{16 + 9 + 4} = \sqrt{29}$$

مثال 2 أوجد جيوب تمام توجيه المتجه $A = (2, -1, 2)$

الحل :

$$\cos\alpha = \frac{2}{|A|} = \frac{2}{3}$$

$$\cos\beta = \frac{-1}{3} \qquad \cos\gamma = \frac{2}{3}$$

حيث :

$$|A| = \sqrt{4 + 1 + 4} = \sqrt{9} = 3$$

مثال 3 نفرض $A = (-1, 3)$ أوجد طول واتجاه المتجه .

الحل :

$$|A| = \sqrt{(-1)^2 + (3)^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$$

وجهة المتجه A تعطى بالزاوية :

$$\theta = \arctan\frac{3}{-1}$$

مثال 4 نفرض أن A متجهاً ممثلاً بالقطعة المستقيمة الموجهة PQ حيث

$P = (2, -1, 3)$ $\quad Q = (-1, -2, 4)$

أوجد مركبات وطولية هذا المتجه ومركبات متجه الوحدة المتفق مع A بالجهة .

$A = (x_Q - x_P , y_Q - y_P , z_Q - z_P)$

$\Rightarrow A = (-3, -1, 1)$

$|A| = \sqrt{9+1+1} = \sqrt{11}$

- لإيجاد مركبات متجه الوحدة المتفق مع A نوجد جيوب تمام التوجيه:

$\cos\alpha = \frac{-3}{\sqrt{11}}$ $\cos\beta = \frac{-1}{\sqrt{11}}$ $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{11}}$

فيكون المتجه:

$u = \left[\frac{-3}{\sqrt{11}}, \frac{-1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}\right]$ هو متجه الوحدة المتفق مع A بالجهة

جمع الأشعة (المتجهات): جمع المتجهات ينتج عنه متجه

مثلاً: $\vec{OP} + \vec{PQ} = \vec{OQ}$

نفرض $\vec{a}, \vec{b}$ شعاعات غير صفريان نجعل مبدأ $\vec{b}$ منطبق على منتهى $\vec{a}$ ومبدأ $\vec{a}$ منطبق على منتهى $\vec{b}$ فيكون المجموع هو القطر الناتج عن متوازي الأضلاع $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

خواص جمع المتجهات

1) تبديلي $\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$

2) تجميعي $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$.

3) $|\vec{a}+\vec{b}| \neq |\vec{a}|+|\vec{b}|$

إلا إذا اتفق $\vec{a}, \vec{b}$ بالمنحى والجهة

4) جمع متجهين متعاكسين $\vec{v}+(-\vec{v}) = 0$

جداء شعاع $\vec{a}$ غير صفري بعدد $\alpha \neq 0$ $\alpha \in \mathbb{R}$

$\alpha\vec{a}$ هو متجه منحاه منحى $\vec{a}$ وجهته:

← اذا كان $\alpha > 0$ الجهة بجهة $\vec{a}$

اذا كان $\alpha < 0$ الجهة عكس جهة $\vec{a}$

وطويلة $\alpha\vec{a}$ هي $|\alpha\vec{a}| = |\alpha|.|\vec{a}|$

$: \alpha > 0$ $|\alpha\vec{a}| = \alpha|\vec{a}|$

$: \alpha < 0$ $|\alpha\vec{a}| = -\alpha|\vec{a}|$

$: \alpha = 0$ $|\alpha\vec{a}| = 0$

تمرين ليكن لدينا المتجه $\vec{AB}$ حيث: $A(x_1, y_1, z_1)$ $B(x_2, y_2, z_2)$

وليكن الشعاع $\vec{CD}$ مركباته $C(3, 4, 7)$

$D(-1, 0, 2)$

1) أوجد الشعاع الذي يضاعف الشعاع $\vec{CD}$

2) أوجد حاصل مجموع المتجهين $\vec{AB}+\vec{CD}$ بدلالة (x, y, z)

3) متى يكون $\vec{AB}$ يساوي ثلاثة أضعاف $\vec{CD}$.

الحل:

① $\vec{V} = 2\vec{CD}$

$\vec{CD} = (x_D - x_C, y_D - y_C, z_D - z_C) = (-4, -4, -5)$

$\Rightarrow \vec{V} = 2\vec{CD} = (-8, -8, -10)$

② $\vec{AB} + \vec{CD}$

$\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

$\vec{CD} = (-4, -4, -5)$

$\vec{AB} + \vec{CD} = (x_2 - x_1 - 4, y_2 - y_1 - 4, z_2 - z_1 - 5)$

$|\vec{AB} + \vec{CD}| = \sqrt{(x_2 - x_1 - 4)^2 + (y_2 - y_1 - 4)^2 + (z_2 - z_1 - 5)^2}$

المطلوب

③ $\vec{AB} = 3\vec{CD}$

$(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = (-12, -12, -15)$

$x_2 - x_1 = -12$

$y_2 - y_1 = -12$

$z_2 - z_1 = -15$

معطيات: $\vec{a}, \vec{b}$ متجهات غير صفرية

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

يكون:

1) $\alpha(\vec{a}+\vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$

2) $(\alpha+\beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$

3) $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$

4) $1.\vec{a} = \vec{a}$

الصيغة التحليلية للمتجه A

$\vec{A} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$

Z, Y, X, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$

$i(1,0,0)$

$j(0,1,0)$

$k(0,0,1)$

الارتباط والاستقلال الخطي نقول عن مجموعة المتجهات $\vec{A_1}, \vec{A_2}, \dots, \vec{A_n}$

إنها مستقلة خطياً إذا تحقق الشرط:

$$\vec{A_1}\alpha_1 + \vec{A_2}\alpha_2 + \dots + \vec{A_n}\alpha_n = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

وإذا كان أحد الأعداد غير صفري كانت الأشعة مرتبطة خطياً.

ملاحظة: 1) اذا كان أحد المتجهات $A_1, A_2, \dots, A_n$ هو المتجه الصفري فإن هذه المجموعة مرتبطة خطياً.

2) إذا كان لدينا مجموعة أشعة $A_1, A_2, \dots, A_n$ وكانت مجموعة جزئية من هذه الأشعة مرتبطة خطياً فإن المجموعة الكبيرة مرتبطة خطياً.

مثال 1 لتكن:

$A = i + 2j + 2k$

$B = 3i + 4k$

$C = 5i - 2j + 6k$

أثبت أن المتجهات A, B, C مرتبطة خطياً

وأعط رتب المتجهات

(, ,)

(, ,)

الحل :

$$\alpha_1 A + \alpha_2 B + \alpha_3 C = 0$$

$$\alpha_1(1,2,2) + \alpha_2(3,0,4) + \alpha_3(5,-2,6) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 + 5\alpha_3 = 0 & (1 \\ 2\alpha_1 - 2\alpha_3 = 0 & (2 \\ 2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 6\alpha_3 = 0 & (3 \end{cases}$$

من (2 ⇐ $\boxed{\alpha_1 = \alpha_3}$ نبدل في (1

$$\alpha_1 + 3\alpha_2 + 5\alpha_1 = 0$$

$$\Rightarrow 6\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha_2 = \frac{-6}{3}\alpha_1 = -2\alpha_1}$$

نبدل في (3

$$2\alpha_1 + 4(-2\alpha_1) + 6\alpha_1 = 0$$

$$2\alpha_1 - 8\alpha_1 + 6\alpha_1 = 0 \Rightarrow 0 \cdot \alpha_1 = 0$$

وبالتالي : $\alpha_1 = r \; ; \forall r \in \mathbb{R}$ أي عدد ضربه بصفر يعطي صفر

وبالتالي يمكن أن يكون α_1 غير صفري

وبالتالي طالما أن أحد الثوابت $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ غير صفري فإن هذه المتجهات مرتبطة خطياً.

مثال 2 | برهن أن المتجهين :

$$A = i + 2j + k$$

$$B = 2i + 3j + 2k$$

مستقلان خطياً.

الحل :

$$\alpha_1 A + \alpha_2 B = 0$$

$$\alpha_1(1,2,1) + \alpha_2(2,3,2) = 0$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 & (1 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 & (2 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = -2\alpha_2$$

نبدل في (2

$$-4\alpha_2 + 3\alpha_2 = 0$$

$$\Rightarrow -\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = -2\alpha_2 = -2(0) = 0$$

وبالتالي A, B مستقلان خطياً

نفرض أن : $B = 2i + 4j - 5k$ $\quad A = i - 2j + 2k$

أوجد التركيب الخطي : $2A + B$ و $\frac{1}{2}A - 2B$

الحل :

$$2A + B = 2(i - 2j + 2k) + (2i + 4j - 5k)$$
$$= (2, -4, 4) + (2, 4, -5) = (4, 0, -1) = 4i - k$$

$$\frac{1}{2}A - 2B = \frac{1}{2}(i - 2j + 2k) - 2(2i + 4j - 5k)$$
$$= (\frac{1}{2}i - j + k) + (-4i - 8j + 10k)$$
$$= -\frac{7}{2}i - 9j + 11k$$

مثال 4 ليكن $B = 2i + j$ $\quad A = -4i + 2j$

$C = 2i + 3j$

أوجد العددين m, n بحيث إن $C = mA + nB$

الحل :

$$mA + nB = m(-4i + 2j) + n(2i + j)$$
$$= (-4m + 2n)i + (2m + n)j$$

$$C = mA + nB$$

$$(2i + 3j) = (-4m + 2n)i + (2m + n)j$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4m + 2n = 2 \\ 2m + n = 3 \end{cases} \xrightarrow{\text{نقسم على } 2} -2m + n = 1 \quad (1)$$

$$\Rightarrow \quad 2m + n = 3 \quad (2)$$

بالجمع

$$n = 2 \Leftarrow 2n = 4$$

نبدل في (1)

$$-2m + 2 = 1 \Rightarrow -2m = -1$$
$$\Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

وهكذا يكون $C = \frac{1}{2}A + 2B$

وطبعاً A, B, C مرتبطة خطياً لكون أحدها تركيب خطي للمتجهين الباقيين

مثال 5 نفرض A, B, C ثلاث نقط اختيارية على خط مستقيم و $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ متجهات الموضع لهذه النقاط على الترتيب بالنسبة لنقطة الأصل.

نفرض أن C نقطة منتصف القطعة المستقيمة AB

أثبت أن $C = \frac{A+B}{2}$

الحل: من الشكل $\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A}$

وبما أن: $\vec{AC} = \frac{1}{2}\vec{AB}$

$$\Rightarrow \vec{AC} = \frac{\vec{B}-\vec{A}}{2}$$

وبحسب قاعدة جمع المتجهات:

$$\underbrace{\vec{OC}}_{\vec{C}} = \underbrace{\vec{OA}}_{\vec{A}} + \underbrace{\vec{AC}}_{\frac{B-A}{2}}$$

$$\Rightarrow \vec{C} = \frac{2A+B-A}{2} = \frac{A+B}{2}$$

تمرين أثبت أن أقطار متوازي الأضلاع متناصفة.

الحل: نفرض OABC متوازي أضلاع

و P منتصف القطر OC

و Q منتصف القطر AB

لنثبت أن P, Q متطابقتين:

لنفرض $\vec{OA}$ هو المتجه $\vec{A}$ ، $\vec{OB}$ هو المتجه $\vec{B}$

فيكون $\vec{OC} = \vec{A} + \vec{B}$

وبما أن P هي منتصف $\vec{OC}$

يكون $\vec{OP} = \frac{\vec{A}+\vec{B}}{2}$

ومن جهة ثانية لدينا : $\vec{BA} = \vec{A} - \vec{B}$

لأن Q منتصف AB $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{BQ} = \frac{\vec{A} - \vec{B}}{2}}$

ولدينا : $\vec{OQ} = \underbrace{\vec{OB}}_{\vec{B}} + \vec{BQ}$

$$\Rightarrow \vec{OQ} = B + \frac{A - B}{2} = \frac{2B + A - B}{2} = \frac{A + B}{2} = \vec{OP}$$

أي إن P و Q نقطتين متطابقتين ، أي إن الأقطار متناصفة.

تمرين أثبت أن متوسطات المثلث تلتقي في نقطة واحدة تقسم المتوسطات بنسبة 1 : 2 ، تبعد عن رأس المثلث بمقدار ضعفي بعدها عن منتصف الضلع المقابل لهذا الرأس ".

C L B M P Q R N A O

الحل : نفرض A, B, C رؤوس مثلث و $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ متجهات الموضع لها بالنسبة لنقطة الأصل O . (كما في الشكل)

لنرمز بـ L, M, N النقاط منتصف الأضلاع BC, CA, AB و $\vec{L}, \vec{M}, \vec{N}$ متجهات الموضع لتلك النقاط على الترتيب.

فيكون "حسب تمرين سابق"

$$L = \frac{B+C}{2} \qquad M = \frac{C+A}{2} \qquad N = \frac{A+B}{2}.$$

- والآن نفرض النقط R, Q, P تقسم القطع AL, BM, CN بنسبة 1 : 2 عندئذ يكون :

$$\frac{AP}{PL} = \frac{2}{1} \Rightarrow AP = 2\,PL$$

$$\Rightarrow OP - \underbrace{OA}_{A} = 2(\underbrace{OL}_{L} - OP)$$

$$\Rightarrow OP - A = 2L - 2OP \Rightarrow 3OP = A + 2L = A + 2\left(\frac{B+C}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{OP = \frac{A+B+C}{3}}$$

$oR = \frac{A+B+C}{3}$ و $oQ = \frac{A+B+C}{3}$ بالمثل نجد

⇐ $op = oQ = oR$ وبالتالي النقاط P, Q, R متطابقة

ويتم المطلوب.

- الجداء السلمي (الداخلي)

معنى هندسياً

ليكن $\vec{a}, \vec{b}$ شعاعين غير صفريين فإننا نعرف

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,.\,|\vec{b}|\,.\,\cos\theta$$

جداء سلمي ←

حيث θ هي الزاوية بين $\vec{a}$, $\vec{b}$.

- الجداء السلمي هو قيمة عددية

- إذا كان أحد الأشعة $\vec{o}$ يكون الناتج صفر.

- اذا كانت θ زاوية حادة ⇐ $\vec{a}\cdot\vec{b} > 0$

θ زاوية منفرجة ⇐ $\vec{a}\cdot\vec{b} < 0$

θ زاوية قائمة ⇐ $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

- نتائج: الشرط اللازم والكافي ليكون $\vec{a}, \vec{b}$ متعامدان هو أن يكون $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

« $\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ »

$i.i = 1$
$j.j = 1$
$k.k = 1$

متعامد
$i.j = 0$
$i.k = 0$
$j.k = 0$

$a.b = b.a$
$A(b+C) = Ab + AC$
$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$
$A.A = |A|^2$

ويعرف الجداء السلمي بالشكل:

تحليلياً

$$A.B = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$A(a_1, a_2, a_3)$ $B(b_1, b_2, b_3)$

- ومنه نحصل على الزاوية بين متجهين من العلاقة الأولى

$A.B = |A|.|B|\cos\theta$ ⇐ $\cos\theta = \frac{A.B}{|A|.|B|}$

مثال: نفرض $A = 2i - j + k$

$B = i + 2j - 2k$

أوجد مركبات المتجه A على طول المتجه B ، ومن ثم أوجد مركبات المتجه B على طول المتجه A.

مركبة المتجه A على طول المتجه B تعطى بالعلاقة :

$$|A|\cos\theta = \frac{A B}{|B|}$$

" $\cos\theta = \frac{A B}{|A|\,|B|}$ " ص

لدينا $\vec{A}(2,-1,1)$
$\vec{B}(1,2,-2)$

$|\vec{B}| = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$

$A.B = (2)(1) + (-1)(2) + (1)(-2)$
$= 2 - 2 - 2 = -2$

$\Rightarrow |A|\cos\theta = \frac{AB}{|B|} = -\frac{2}{3}$

وبالمثل نجد : $|B|\cos\theta = \frac{AB}{|A|} = \frac{-2}{\sqrt{6}} = \frac{-2\sqrt{6}}{6} = \frac{-\sqrt{6}}{3}$ حيث $|A| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$

مثال 2 | أوجد الزاوية بين المتجهين $A = 2i - j - 2k$ $(2,-1,-2)$
$B = i + 2j + 2k$ $(1,2,2)$

الحل :
$A.B = (2)(1) + (-1)(2) + (-2)(2)$
$= 2 - 2 - 4 = -4$

$\cos\theta = \frac{A.B}{|A|.|B|}$

$|A| = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$
$|B| = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{-4}{9} \Rightarrow \theta = \arccos\frac{-4}{9}$

مثال 3 | أثبت صحة مبرهنة فيثاغورث في المستوي .

الحل : لنفرض أن المتجهين A , B يمثلان الضلعين القائمين في مثلث قائم ABC وأن C الوتر فيه ويكون الوتر ممثلاً أيضاً بالمتجه A+B وبالتالي :

$C^2 = |A+B|^2 = (A+B)(A+B) = A.A + A.B + B.A + B.B$
$= |A|^2 + 2A.B + |B|^2 = |A|^2 + |B|^2$

من خواص الجداء السلمي $A.A = |A|^2$

$B.A = A.B$

$A.B = 0$ لأنهما متعامدان

وهو المطلوب

مثال 4 | نفرض أن $A = 2i + j - 2k$ $(2,1,-2)$ ، $C = i + 2j + 3k$ $(1,2,3)$

عبر عن المتجه C بدلالة متجهين إحداهما عمودي على A والآخر موازي له.

الحل: المتجه الموازي لـ A له الشكل mA حيث $m \neq 0 \in \mathbb{R}$

ونفرض أن B متجه عمودي على A بحيث يكون:

$$C = mA + B$$

نضرب سلمياً بـ A:

$$AC = (mA+B)A = mAA + \underbrace{BA}_{\text{متعامدان } 0} = m|A|^2$$

$= CA$

ولدينا:

$$AC = (1)(2)+(2)(1)+(3)(-2) = 2+2-6 = 4-6 = -2$$
$$|A| = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$$
$$\Rightarrow m = \frac{-2}{9}$$

$$B = C - mA = (1,2,3) + \frac{2}{9}(2,1,-2) = \left(\frac{9}{9}, \frac{18}{9}, \frac{27}{9}\right) + \left(\frac{4}{9}, \frac{2}{9}, \frac{-4}{9}\right)$$

$$\Rightarrow B = \left(\frac{13}{9}, \frac{20}{9}, \frac{23}{9}\right) = \frac{13}{9}i + \frac{20}{9}j + \frac{23}{9}k$$

تمرين: أثبت أن الارتفاعات في مثلث تتلاقى في نقطة واحدة.

الحل: ليكن ABC مثلث وليكن h نقطة تلاقي الارتفاعين النازلين من $\vec{A}$ و $\vec{B}$.

وإن: $\vec{Ah} \cdot \vec{BC} = 0$ "للتعامد"

$\vec{Bh} \cdot \vec{AC} = 0$

لنبرهن أن: $\vec{Ch} \cdot \vec{AB} = 0$ أي $\vec{Ch} \perp \vec{AB}$

لدينا:

$$\vec{AB} + \vec{Bh} = \vec{Ah} \Rightarrow \vec{AB} = \vec{Ah} - \vec{Bh}$$
$$\vec{AC} + \vec{Ch} = \vec{Ah} \Rightarrow \vec{AC} = \vec{Ah} - \vec{Ch}$$
$$\vec{BC} + \vec{Ch} = \vec{Bh} \Rightarrow \vec{BC} = \vec{Bh} - \vec{Ch}$$

ولدينا:

$$\vec{Ah} \cdot \vec{BC} = \vec{Bh} \cdot \vec{AC}$$

$$\Rightarrow \vec{Ah}(\vec{Bh}-\vec{ch}) = \vec{Bh}(\vec{Ah}-\vec{ch})$$

$$\vec{Ah}\,\vec{Bh} - \vec{Ah}\,\vec{ch} = \vec{Bh}\,\vec{Ah} - \vec{Bh}\,\vec{ch}$$

$$\Rightarrow \vec{Ah}\,\vec{ch} = \vec{Bh}\cdot\vec{ch}$$

$$\Rightarrow \vec{Ah}\cdot\vec{ch} - \vec{Bh}\cdot\vec{ch} = 0 \Rightarrow \vec{ch}[\underbrace{\vec{Ah}-\vec{Bh}}_{AB}] = 0$$

$$\Rightarrow \vec{ch}\cdot\vec{AB} = 0 \Rightarrow \vec{ch} \perp \vec{AB}$$

والارتفاعات تتلاقى في نقطة واحدة.

الجداء الخارجي "المتجهي" ليكن $\vec{a},\vec{b}$ شعاعان غير صفريان وغير متوازيان فإن $\vec{a}\times\vec{b}$ هو شعاع له الخصائص التالية:

1) $\vec{a}\times\vec{b}$ عمودي على كل من $\vec{b},\vec{a}$

2) طوله $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\theta$

مثال: أشعة الواحدة $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ فإن $i\times j = k$

حيث k عمودي على كل من i,j

"الجداء الخارجي يعطي متجه
الجداء الداخلي يعطي عدد"

ملاحظة: إذا كان أحد المتجهين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ معدوم فإن $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$

- نتائج: إن طول متجه الجداء الخارجي هو مساحة متوازي الأضلاع المنشأ على المتجهين

$$|\vec{A}\times\vec{B}| = |\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\sin\theta$$

حيث $|\vec{B}|\sin\theta = h$ ← الارتفاع

$$\Rightarrow |\vec{A}\times\vec{B}| = \underset{\text{القاعدة}}{|\vec{A}|}\cdot\underset{\text{الارتفاع}}{h}$$

$$\Rightarrow S = |\vec{A}\times\vec{B}|$$ ← مساحة متوازي الأضلاع

ومنه: مساحة المثلث المنشأ في $\vec{B},\vec{A}$:

$$S = \frac{1}{2}|\vec{A}\times\vec{B}|$$

- إذا كان $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$ ، $B = (b_1, b_2, b_3)$

فإن :

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

- نتائج :

1) إذا كان أحد المتجهين معدوم فإن الجداء المتجهي هو المتجه الصفري

2) $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

3) $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$

4) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ أثبت ذلك ؟

$$\vec{a} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{a})$$

$$\Rightarrow \vec{a} \times \vec{a} + (\vec{a} \times \vec{a}) = \vec{0} \Rightarrow 2(\vec{a} \times \vec{a}) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$$

الجداء الخارجي ليس تبديلي ولا تجميعي

$A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$

5) $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$

6) $(\lambda . \vec{a}) \times (\mu . \vec{b}) = \lambda\mu(\vec{a} \times \vec{b})$

مثال : $\vec{i} \times \vec{j}$ ، $\vec{j} \times \vec{i}$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 0 + 1\vec{k} = \vec{k}$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{k}$$

$i = (1, 0, 0)$
$j = (0, 1, 0)$
$k = (0, 0, 1)$

تمرين : برهن أن : $(\vec{a} \times \vec{b})^2 + (\vec{a} . \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 . |\vec{b}|^2$

الحل :

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| . |\vec{b}| \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$$

$$\vec{a} . \vec{b} = |\vec{a}| . |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$$

نربع ثم نجمع

$$(\vec{a} \times \vec{b})^2 + (\vec{a} . \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \sin^2(a,b) + |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \cos^2(\widehat{a,b})$$

$$= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \underbrace{(\sin^2(a,b) + \cos^2(a,b))}_{1}$$

$$\Rightarrow (\vec{a} \times \vec{b})^2 + (\vec{a} . \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2$$

$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}\times b)+(a\times c)$

الجداء المختلط لتكن $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ ثلاثة متجهات نعرف الجداء الداخلي للمتجهين $\vec{A}\times\vec{B}$, $\vec{C}$ أي

$$(\vec{A}\times\vec{B}).\vec{C}=\vec{C}.(\vec{A}\times\vec{B})$$

بالجداء المختلط، ونرمز له بـ $(\vec{A},\vec{B},\vec{C})$ وهو قيمة جبرية وقيمته المطلقة هي حجم متوازي السطوح المنشأ بالأشعة $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$

أي :

$$|(\vec{A},\vec{B},\vec{C})|=|(\vec{A}\times\vec{B}).\vec{C}|=|\vec{A}\times\vec{B}|.|\vec{C}|$$

حجم متوازي السطوح — مساحة متوازي الأضلاع — الارتفاع

نتائج: 1)

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{c},\vec{a},\vec{b})=(\vec{b},\vec{c},\vec{a})=-(\vec{c},\vec{b},\vec{a})=-(\vec{b},\vec{a},\vec{c})$$

أي إذا أجرينا تبديلاً على الترتيب في الأشعة بشكل دوري فإن قيمة الجداء المختلط لا تتغير.

أما إذا بادلنا بين شعاعين متتاليين وتركنا الثالث في مكانه فإن الجداء تتغير إشارته.

2) $(\vec{a},\vec{a},\vec{b})=0$

3) $(\alpha\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\alpha(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$

$$(\alpha\vec{a},\beta\vec{b},\gamma\vec{c})=\alpha\beta\gamma(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$$

4) الشرط اللازم والكافي لكي تكون الأشعة $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ مرتبطة خطياً هو أن ينعدم الجداء المختلط لها أي :

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=0 \Leftrightarrow \vec{a},\vec{b},\vec{c} \text{ مرتبطة خطياً}$$

ـ هام : اذا كان

$A=(a_1,a_2,a_3)$

$B=(b_1,b_2,b_3)$

$C=(c_1,c_2,c_3)$

فإن

$$(\vec{A},\vec{B},\vec{C})=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

الجداء الثلاثي المتجهي " دستور جيبس " أو " علاقة لاغرانج "
(سؤال امتحاني)

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\cdot\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}$$

الناتج شعاع .

الإثبات : نفرض $A(a_1, a_2, a_3)$ $B(b_1, b_2, b_3)$ $C(c_1, c_2, c_3)$

أولاً نوجد : $B\times C = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

ثم نأخذ $A\times(B\times C)$.

وبذلك أوجدنا المتجه الممثل للطرف الأول

ثم نوجد $\vec{A}\cdot\vec{C}$ ونضرب بـ $\vec{B}$.
ونوجد $A\cdot B$ ونضرب بـ $\vec{C}$.
} ناتج الطرح هو المتجه الناتج

ونحصل على متجهين متساويين في كلا الطرفين .

جداء أربعة متجهات (سؤال امتحاني)

النوع الأول من جداء أربع متجهات يعطي عدد — مطابقة لاغرانج

$$(\vec{A}\times\vec{B})(\vec{C}\times\vec{D}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})\cdot(\vec{B}\cdot\vec{D}) - (\vec{A}\cdot\vec{D})(\vec{B}\cdot\vec{C})$$

الإثبات : لبرهانها نفرض $C\times D = f$

$$(A\times B)(C\times D) = (A\times B)\cdot f = (A, B, f) = A\cdot(B\times f) =$$

$$= A\cdot[B\times(C\times D)]$$

$$= A\cdot[(B\cdot D)\cdot C - (B\cdot C)\cdot D]$$

$$= (AC)(BD) - (AD)(BC) .$$

وهو المطلوب

النوع الثاني من جداء أربع متجهات يعطي متجه

$$(A\times B)\times(C\times D) = (A, B, D)C - (A, B, C)D \quad (1)$$

$$= (A, C, D)B - (B, C, D)A \quad (2)$$

الإثبات : (1) لبرهانها نفرض : $A\times B = f$

$$(A\times B)\times(C\times D) = f\times(C\times D) = (f.D).C - (f.C)D$$

$$= [(A\times B).D].C - [(A\times B).C].D$$

$$= (A,B,D).C - (A,B,C)D$$

2) لبرهانها نضع $C\times D = g$ وكما سبق نتابع ....

- ملاحظة: من علاقات لاغرانج ينتج العلاقة:

$$|A\times B|^2 = |A|^2.|B|^2 - (A.B)^2$$

الإثبات:

$$|A\times B|^2 = (A\times B)(A\times B) = (A.A)(B.B) - (A.B)(A.B)$$

من (2) لاغرانج أول علاقة

$$= |A|^2.|B|^2 - (A.B)^2$$

- ملاحظة: ينتج مباشرةً من لاغرانج 2 وبعد مساواة الطرفين الحاصلين في جهة واحدة ونقلهم إلى طرف واحد العلاقة:

$$(A,B,D)C - (A,B,C)D - \underbrace{(A,C,D)}_{\text{معاملات } B}B + \underbrace{(B,C,D)}_{\text{معاملات } A}A = 0$$

وهي علاقة خطية بين المتجهات.

وإذا كانت هذه العلاقة فيها معاملات المتجهات A, B, C, D معدومة معاً

⇐ المتجهات الأربعة تقع في مستوٍ واحد.

أحد هذه المعاملات غير معدوم مثلاً معاملات A غير معدومة $(B,C,D)\neq 0$ وبالتالي نقسم على معاملات A فنجد أن A كتب بدلالة المتجهات B, C, D وبالتالي المتجهات الأربعة مرتبطة خطياً وواقعة في مستوٍ واحد.

⇐ في الفراغ الثلاثي أي أربع متجهات تكون مرتبطة خطياً

ملاحظات: 1) ينعدم الجداء الخارجي لمتجهين غير صفريين عندما يتوازى المتجهين، يكون $\sin\theta = 0 \Leftarrow \theta = 0, \pi$ ..

2) الشرط اللازم والكافي لتكون 3 أشعة تقع في مستو واحد هو أن يكون جداؤها المختلط يساوي الصفر.

3) ينعدم الجداء المختلط عندما يكون: 1) شعاعين متوازيين
2) الأشعة تقع في مستو واحد
3) عندما يكون سطران في المحدد متناسبان "أو متساويان ضمنها"

تمرين 1 لدينا A, B, C, D أربع نقاط في الفراغ:
1) برهن صحة العلاقة التالية:

$$\vec{AB}\cdot\vec{CD}+\vec{AC}\,\vec{DB}+\vec{AD}\cdot\vec{BC}=0$$

2) برهن اعتماداً على العلاقة السابقة أنه إذا تعامد حرفا كل من زوجي الأحرف المتقابلة في رباعي الوجوه، تعامد حرفا الزوج الثالث أيضاً

الحل: 1)

$$\vec{AB}\cdot\vec{CD}+\vec{AC}\,\vec{DB}+\vec{AD}\cdot\vec{BC}=$$

$$\vec{AB}\cdot(\vec{AD}-\vec{AC})+\vec{AC}(\vec{AB}-\vec{AD})+\vec{AD}(\vec{AC}-\vec{AB})=$$

$$=\vec{AB}\cdot\vec{AD}-\vec{AB}\,\vec{AC}+\vec{AC}\cdot\vec{AB}-\vec{AC}\,\vec{AD}+\vec{AD}\,\vec{AC}-\vec{AD}\,\vec{AB}=0$$

2) $\vec{AB}$, $\vec{CD}$ متعامدين $\Leftarrow$ $\vec{CD}\cdot\vec{AB}=0$

$\vec{AC}$, $\vec{DB}$ متعامدين $\Leftarrow$ $\vec{AC}\cdot\vec{DB}=0$

نعوض في العلاقة السابقة:

$$0+0+\vec{AD}\cdot\vec{BC}=0$$

$\Leftarrow$ $\vec{AD}$, $\vec{BC}$ متعامدان.

تمرين 2 برهن صحة العلاقة التالية:

$$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{C}\times\vec{D})+(\vec{B}\times\vec{C})\cdot(\vec{A}\times\vec{D})+(\vec{C}\times\vec{A})(\vec{B}\times\vec{D})=0$$

الحل: العلاقة تكتب بالشكل:

$$(\vec{A}\times\vec{B}, \vec{C}, \vec{D}) + (\vec{B}\times\vec{C}, \vec{A}, \vec{D}) + (\vec{C}\times\vec{A}, \vec{B}, \vec{D}) =$$

$$= \left[(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C} + (\vec{B}\times\vec{C})\times\vec{A} + (\vec{C}\times\vec{A})\times\vec{B}\right]\cdot\vec{D}$$

نطبق جيبس :

$$\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w}) = (\vec{u}\cdot\vec{w})\cdot\vec{v} - (\vec{u}\cdot\vec{v})\cdot\vec{w}$$

$$= \left[(\vec{A}\cdot\vec{C})\cdot\vec{B} - (\vec{A}\cdot\vec{B})\cdot\vec{C} - (\vec{B}\cdot\vec{C})\cdot\vec{A} + (\vec{B}\cdot\vec{A})\vec{C} + (\vec{C}\cdot\vec{B})\cdot\vec{A} - (\vec{C}\cdot\vec{A})\cdot\vec{B}\right]\vec{D} = 0\cdot\vec{D} = 0$$

تمرين 3| ليكن لدينا المتجهات $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ غير واقعة في مستوٍ واحد وثلاثة متجهات غيرها $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ غير واقعة في مستوٍ واحد فإذا كانت بين هذه المتجهات العلاقات :

$$\vec{A}\cdot\vec{a} = \vec{B}\cdot\vec{b} = \vec{C}\cdot\vec{c} = 1$$

$$\vec{A}\cdot\vec{b} = \vec{A}\cdot\vec{c} = \vec{B}\cdot\vec{a} = \vec{B}\cdot\vec{c} = \vec{C}\cdot\vec{a} = \vec{C}\cdot\vec{b} = 0$$

أثبت أن :

$$\vec{A} = \frac{\vec{b}\times\vec{c}}{(\vec{a},\vec{b},\vec{c})} \qquad \vec{B} = \frac{\vec{C}\times\vec{a}}{(\vec{a},\vec{b},\vec{c})} \qquad \vec{C} = \frac{\vec{a}\times\vec{b}}{(\vec{a},\vec{b},\vec{c})}$$

الحل :

$$\vec{A}\cdot\vec{b} = \vec{A}\cdot\vec{c} = 0$$

$\vec{A}$ عمودي على كل من $\vec{b}$, $\vec{c}$

⇐ $\vec{A}$ مرتبط خطياً مع $\vec{b}\times\vec{c}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{A} = m(\vec{b}\times\vec{c})} \; *$$

نضرب العلاقة * بـ $\vec{a}$:

$$\vec{A}\cdot\vec{a} = m(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}$$

$$1 = m(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}$$

$$m = \frac{1}{(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}} = \frac{1}{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}$$

نبدل في * نجد :

$$\vec{A} = \frac{\vec{b} \times \vec{c}}{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}$$

بالمثل الباقي ...

تمارين

تمرين 1 لتكن الأشعة $\vec{u} = (2, 3, 0)$ $\vec{v} = (5, 4, -1)$

$\vec{w} = (-4, 2, 1)$

1) احسب $\vec{u} + \vec{v}$ $\vec{w} - \vec{u}$ $\vec{u} - 3\vec{v}$

2) أوجد $|\vec{v}|$ $|\vec{u}|$ $|\vec{w} - \vec{u}|$

الحل : 1)

$\vec{u} + \vec{v} = (7, 7, -1)$

$\vec{w} - \vec{u} = (-6, -1, 1)$

$\vec{u} - 3\vec{v} = (2, 3, 0) + (-15, -12, +3) = (-13, -9, 3)$

2)

$|\vec{u}| = \sqrt{4 + 9 + 0} = \sqrt{13}$

$|\vec{v}| = \sqrt{25 + 16 + 1} = \sqrt{42}$

$|\vec{w} - \vec{u}| = \sqrt{36 + 1 + 1} = \sqrt{38}$

تمرين 2 ليكن $\vec{u} = (1, 2)$ $\vec{v} = (3, 2)$

أوجد $\vec{v} \cdot \vec{u}$ ثم أوجد θ بينهما .

الحل :

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} = (3)(1) + (2)(2) = 3 + 4 = 7$

$|u| = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$

$|v| = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\theta$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{7}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{13}} = \frac{7}{\sqrt{65}}$$

3| ليكن $\vec{u}=(1,2,0)$ $\vec{v}=(-2,1,0)$

هل هما متعامدان.

الحل : $\vec{u}.\vec{v}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=(-2)(1)+(1)(2)+(0)(0)$

$=-2+2+0=0 \Rightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$

تمرين 4 | ليكن : $\vec{u}=(2,5,-3)$. $\vec{v}=(3,\frac{15}{2},\frac{-9}{2})$

وضح : هل هما مستقلان خطياً أم مرتبطان .

الحل : $\vec{v}=\frac{3}{2}\vec{u}$

$\exists\lambda=\frac{3}{2}$

حيث :

$\frac{x_1}{x_2}=\frac{3}{2}$ $\frac{y_1}{y_2}=\frac{5}{\frac{15}{2}}=\frac{3}{2}$

$\frac{z_1}{z_2}=\frac{-3}{-\frac{9}{2}}=\frac{3}{2}$

أي إنهما مرتبطان
وهو المطلوب.

تمرين 5 | لتكن المتجهات :

$\vec{w}(-4,2,1)$ $\vec{v}=(5,4,-1)$ $\vec{u}=(2,3,0)$

نتيجة تمرين 1

1) احسب $|\vec{w}-\vec{u}|$ ثم قارن مع $|\vec{w}|-|\vec{u}|$

2) احسب $|\vec{u}+\vec{v}|$ ثم قارن مع $|\vec{u}|+|\vec{v}|$

الحل :

1 : $|\vec{w}-\vec{u}|=\sqrt{38}=6.16$: وجدنا أن

$|\vec{w}|=\sqrt{16+4+1}=\sqrt{21}$

$|\vec{w}|-|\vec{u}|=\sqrt{21}+\sqrt{13}=$

$=4.5-3.6=0.9 \Rightarrow |\vec{w}-\vec{u}|\neq|\vec{w}|-|\vec{u}|$

2 $|\vec{u}+\vec{v}|=\sqrt{49+49+1}=\sqrt{99}=9.9$

$|\vec{u}|+|\vec{v}|=\sqrt{13}+\sqrt{42}=3.6+6.3=9.9$

$\Rightarrow |\vec{u}+\vec{v}|=|\vec{u}|+|\vec{v}|$

أي يمكن توزيع المتجهة المطلقة على الجمع لكنه لا يمكنها التوزيع على الطرح .

*- نعرف متجه الواحدة للمتجه $\vec{v}$ بالعلاقة : $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

تمرين 6 إذا كان :

$$\vec{A} = 4\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\vec{M} = -2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$$

والمطلوب: احسب شعاع الواحدة العمود على كل من A و M.

الحل : بداية نحسب الجداء الخارجي ثم نحسب طويلته .

شعاع عمودي على $\vec{A}, \vec{M}$

$$\vec{A} \times \vec{M} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 4\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$|\vec{A} \times \vec{M}| = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

فيكون متجه الواحدة هو :

$$\frac{\vec{A} \times \vec{M}}{|\vec{A} \times \vec{M}|} = \frac{4\vec{j} + 2\vec{k}}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{k}$$

تمرين 7 أوجد متجه الواحدة العمود على المستوي المعين بالمتجهين .

$$\vec{A} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$$

$$\vec{B} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

الحل :

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14} \Rightarrow e_{A \times B} = \frac{1}{\sqrt{14}}(2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k})$$

رمز شعاع الواحدة

8) برهن أن النقاط:

$T(-4,4,4)$ $P(4,5,1)$ $Q(0,-1,-1)$ $S(3,9,4)$

تقع في مستوٍ واحد.

الحل: نأخذ الجداء المختلط لثلاث أشعة:

$\vec{PQ} = (x_Q - x_P, y_Q - y_P, z_Q - z_P) = -4\vec{i} - 6\vec{j} - 2\vec{k}$

$\vec{PT} = -8\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$

$\vec{PS} = -\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$

$$\Rightarrow (\vec{PQ}, \vec{PT}, \vec{PS}) = \begin{vmatrix} -4 & -6 & -2 \\ -8 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

بما أن الناتج صفر

⇐ النقاط تقع في مستوٍ واحد.

تمرين 9 | إذا كان:

$\vec{A} = 3\vec{i} + \vec{k}$ $(3,0,1)$

$\vec{B} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ $(1,2,-2)$

أوجد:

(a) $2\vec{A} - \vec{B}$

(b) $\vec{A} \cdot \vec{B}$

(c) $\vec{A} \times \vec{B}$

(d) الزاوية المحصورة بين المتجهين

(e) $\vec{B} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$

(f) الزاوية المحصورة بين المتجهين $\vec{B}$, $(\vec{A} \times \vec{B})$

(g) مساحة متوازي الأضلاع الذي ضلعاه $\vec{B}$, $(\vec{A} \times \vec{B})$

الحل:

(a) $2\vec{A} - \vec{B} = 2(3\vec{i} + \vec{k}) - (\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k})$

$= 6\vec{i} + 2\vec{k} - \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k} = 5\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$

(b) $\vec{A} \cdot \vec{B} = (3)(1) + (6)(2) + (1)(-2) = 3 - 2 = 1$

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + 7\vec{j} + 6\vec{k}$$

(d) $\vec{A}.\vec{B} = |A|.|B| \cos\theta$

$|A| = \sqrt{9+0+1} = \sqrt{10}$

$|B| = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$

$1 = \sqrt{10} . 3 . \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{3\sqrt{10}}$

$\Rightarrow \theta = \arccos \frac{1}{3\sqrt{10}} \cong 84^\circ$

(e) $\vec{B}.(\vec{A}\times\vec{B}) = -2+14-12=0$

$\vec{B} \to (1,2,-2)$ $\quad (\vec{A}\times\vec{B}) \to (-2,7,6)$

(f) $\vec{B}.(\vec{A}\times\vec{B}) = |\vec{B}|.|\vec{A}\times\vec{B}| \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

أي أن $\vec{B} \perp (\vec{A}\times\vec{B})$

(g) $$\vec{B}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 7 & 6 \end{vmatrix} = 26\vec{i} - 2\vec{j} + 11\vec{k}$$

مساحة متوازي الأضلاع هي :

$$|\vec{B}\times(\vec{A}\times\vec{B})| = \sqrt{(26)^2+(2)^2+(11)^2} = \sqrt{676+4+121} = \sqrt{801} \text{ Unit}^2$$

تمرين 10 أوجد مساحة المثلث الذي تقع رؤوسه في النقاط :

$A(2,5,0)$ $\quad B(11,3,8)$ $\quad C(8,-1,11)$

الحل :

$\vec{AB} = (9,-2,8)$ $\quad \vec{AC} = (3,-6,11)$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 9 & -2 & 8 \\ 3 & -6 & 11 \end{vmatrix} = 26\vec{i} + 75\vec{j} - 48\vec{k}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{(26)^2 + (75)^2 + (-48)^2} = \cdots$$

تمرين 11

أوجد حجم الهرم الذي رؤوسه هي:

$A(1,2,0)$ $B(2,3,3)$ $C(1,5,3)$ $D(1,2,6)$

الحل: حجم الهرم $= \frac{1}{6}$ حجم متوازي السطوح

$\vec{AB}(1,1,3)$ $\vec{AC}(0,3,3)$ $\vec{AD}(0,0,6)$

$$V = \frac{1}{6}(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}(1)(3)(6) = \frac{18}{6} = 3$$

حجم متوازي السطوح

مثلثية عليا فتحة المحدد تساوي جداء عناصر القطر الرئيسي.

تمرين 12

ليكن ABC مثلث، وليكن M_1, M_2 منتصف AB, AC كذلك

برهن أن الخط الواصل بين منتصفي ضلعين في مثلث يساوي نصف الضلع الثالث ويوازيها.

الحل:

$$\vec{M_1M_2} = \frac{1}{2}\vec{CB}$$

ولدينا:

$$\Rightarrow \vec{M_1M_2} = \vec{M_1A} + \vec{AM_2} = \frac{1}{2}\vec{BA} + \frac{1}{2}\vec{AC}$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{BA} + \vec{AC}) = \frac{1}{2}\vec{BC}$$

لأنها مرتبطة خطياً $\vec{CB} \parallel \vec{M_1M_2}$ ، M_1M_2 تساوي $\frac{1}{2}$ $\vec{BC}$ من ضرب

تمرين 13 ليكن $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ثلاث متجهات غير صفرية وغير م...

ولنفرض متجه $\vec{g}$ يحقق: $\vec{g}\cdot\vec{v} = \vec{g}\cdot\vec{w} = 0$

و $\vec{g}\cdot\vec{u} = 1$

برهن أن: $\vec{g} = \dfrac{\vec{v}\times\vec{w}}{(\vec{u},\vec{v},\vec{w})}$

ثم أوجد $\vec{g}$ إذا كان: $u = \vec{i}$, $v = \vec{j}$, $w = \vec{k}$

الحل:

$\vec{g}\cdot\vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{g}\perp\vec{v}$

$\vec{g}\cdot\vec{w} = 0 \Rightarrow \vec{g}\perp\vec{w}$

$\Rightarrow \vec{g} \parallel \vec{v}\times\vec{w}$

$\Rightarrow$ ارتباط خطي

$\exists \alpha\in\mathbb{R} : \boxed{\vec{g} = \alpha(\vec{v}\times\vec{w})}$ *

نضرب داخلياً بـ $\vec{u}$:

$$\vec{g}\cdot\vec{u} = \alpha(\vec{v}\times\vec{w})\cdot\vec{u}$$

$$\Rightarrow 1 = \alpha(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) \Rightarrow \alpha = \frac{1}{(\vec{u},\vec{v},\vec{w})}$$

نعوض في *:

$$\vec{g} = \frac{\vec{v}\times\vec{w}}{(\vec{u},\vec{v},\vec{w})}$$

وإذا كان $\vec{u} = \vec{i}$ $\vec{v} = \vec{j}$ $\vec{w} = \vec{k}$

$$\Rightarrow \vec{g} = \frac{\vec{j}\times\vec{k}}{1} = \vec{i}$$

حيث:

$$(\vec{i},\vec{j},\vec{k}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$\vec{j}\times\vec{k} = \vec{i}$

تمرين 14 بين أن المتجهات:

$\vec{A} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$

$\vec{B} = \vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$

$\vec{C} = 2\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$

تكوّن مثلثاً قائم الزاوية

الحل:

Scanned by CamScanner

يكفي لكي تكون المتجهات $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ تشكل مثلثاً أن يكون أحدها مجموع للمتجهين الباقيين، أو مجموعها يساوي الصفر «$A+B+C=0$»

نلاحظ أن:

مثلث $\Leftarrow \vec{A} = \vec{B} + \vec{C}$

ولدينا:

$A.B = (3)(1) + (-2)(-3) + (1)(5) = 14$

$A.C = 0$ $B.C = 2 - 3 - 20 = -21$

وبالتالي فإن المتجهين A, C متعامدان والمثلث ABC قائم الزاوية.

تمرين 15 برهن أن أقطار المعين متعامدة.

Q, B, P, R, A, B, O

الحل: لدينا: $\vec{OQ} = \vec{OP} + \vec{PQ} = \vec{A} + \vec{B}$ (فرض)

ولدينا: $\vec{OR} + \vec{RP} = \vec{OP}$

$\Rightarrow \vec{B} + \vec{RP} = \vec{A} \Rightarrow \vec{RP} = \vec{A} - \vec{B}$

فيكون:

$\vec{OQ} . \vec{RP} = (A+B)(A-B) = |A|^2 + AB - AB - |B|^2 = |A|^2 - |B|^2$

ولكن $|A| = |B|$ (ضلعا معين)

$\Leftarrow \vec{OQ} . \vec{RP} = 0$

$\Leftarrow \vec{OQ} \perp \vec{RP}$

تمرين 16 أوجد متجهي الوحدة العموديين على المتجهين:

$A = i + 2j - k$ $B = 2i - 2j + k$

الحل: المتجهين $A \times B$ و $B \times A$ يعامدان كل من B, A

$$A \times B = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -3\vec{j} - 6\vec{k}$$

$B \times A = -(A \times B) = 3\vec{j} + 6\vec{k}$

$|A \times B| = |B \times A|$ فيكون متجهي الوحدة:

$= \sqrt{9+36} = \sqrt{45}$

$= 3\sqrt{5}$

$$e_{A\times B} = \frac{-3j-6k}{3\sqrt{5}} = \frac{-j-2k}{\sqrt{5}}$$

$$e_{B\times A} = \frac{3j+6k}{3\sqrt{5}} = \frac{j+2k}{\sqrt{5}}$$

تمارين

تمرين ١ بفرض

$(1,2,-3)$ $\quad A = i + 2j - 3k$

$(3,-1,2)$ $\quad B = 3i - j + 2k$

أوجد $A\times B$ ثم أثبت صحة العلاقة

$$|A\times B| = |A|.|B|.\sin\theta$$

الحل:

$$A\times B = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i} - 11\vec{j} - 7\vec{k}$$

$$* \quad |A\times B| = \sqrt{1+121+49} = \sqrt{171}$$

لدينا:

$$|A| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$$

$$|B| = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$$

$$A.B = (1)(3) + (2)(-1) + (-3)(2) = -5$$

$$\cos\theta = \frac{A.B}{|A|.|B|} = \frac{-5}{\sqrt{14}.\sqrt{14}} = -\frac{5}{14}$$

$$\Rightarrow \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \frac{25}{196} = \frac{171}{196}$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \sqrt{\frac{171}{196}} = \frac{\sqrt{171}}{14}$$

فيكون:

$$** \quad |A|.|B|.\sin\theta = \sqrt{14}.\sqrt{14}.\frac{\sqrt{171}}{14} = \sqrt{171}$$

بالمقارنة * و ** نجد أن المطلوب محقق.

$$e_{A\times B} = \frac{-3j-6k}{3\sqrt{5}} = -\frac{j-2k}{\sqrt{5}}$$

$$e_{B\times A} = \frac{3j+6k}{3\sqrt{5}} = \frac{j+2k}{\sqrt{5}}$$

تمارين

تمرين ١ بفرض

(1,2,-3) $A = i+2j-3k$

(3,-1,2) $B = 3i-j+2k$

أوجد $A\times B$ ثم أثبت صحة العلاقة

$$|A\times B| = |A|.|B|.\sin\theta$$

الحل:

$$A\times B = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i} - 11\vec{j} - 7\vec{k}$$

$$* \quad |A\times B| = \sqrt{1+121+49} = \sqrt{171}$$

لدينا:

$$|A| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$$

$$|B| = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$$

$$A.B = (1)(3)+(2)(-1)+(-3)(2) = -5$$

$$\cos\theta = \frac{A.B}{|A|.|B|} = \frac{-5}{\sqrt{14}.\sqrt{14}} = -\frac{5}{14}$$

$$\Rightarrow \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \sin^2\theta = 1-\cos^2\theta = 1-\frac{25}{196} = \frac{171}{196}$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \sqrt{\frac{171}{196}} = \frac{\sqrt{171}}{14}$$

فيكون:

$$** \quad |A|.|B|.\sin\theta = \sqrt{14}.\sqrt{14}.\frac{\sqrt{171}}{14} = \sqrt{171}$$

بالمقارنة * و ** نجد أن المطلوب محقق.

تمرين 2 نفرض $A = 3i + 2j - 6k$ $B = i - 2j + 2k$

أوجد مساحة المثلث المكون من المتجهات $A, B, A-B$

الحل :

$$S = \frac{1}{2}|A \times B|$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & -6 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -8\vec{i} - 12\vec{j} - 8\vec{k}$$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{64 + 144 + 64} = \sqrt{272} = \sqrt{17 \times 16} = 4\sqrt{17}$$

$$\Rightarrow S = 2\sqrt{17}$$

تمرين 3 أوجد مساحة المثلث الذي رؤوسه النقاط :

$R : (3, -1, 2)$ $Q(-1, 3, 2)$ $P(1, 2, 3)$

الحل :

$$A = PQ = -2i + j - k$$

$$B = PR = 2i - 3j - k$$

$$A \times B = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -4i - 4j + 4k$$

$$|A \times B| = 4\sqrt{3} \quad \Rightarrow S = \frac{|A \times B|}{2} = 2\sqrt{3}$$

تمرين 4 أوجد الضرب المتجهي الثلاثي (A, B, C) إذا كان :

$A = 3i + j - 2k$, $B = 2i - j - 3k$ $C = 4i + 2j + k$

الحل :

$$(A, B, C) = AB \times C = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -15$$

تمرين 5 نفرض $P(1, -2, 3)$ $Q(2, 1, -2)$ $R(-2, 1, 1)$ $S(2, 2, 3)$

أربع نقط في الفراغ الثلاثي أوجد حجم متوازي السطوح المكون من المتجهات

PS, PR, PQ

$A = PQ = (2-1)i + (1-(-2))j + (-2-3)k = i + 3j - 5k$

$B = PR = (-2-1)i + (1-(-2))j + (-1-3)k = -3i + 3j - 4k$

$C = PS = (2-1)i + (2-(-2))j + (3-3)k = i + 4j$

فيكون حجم متوازي السطوح:

$$(A,B,C) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -3 & 3 & -4 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 79$$

اشارة المحدد سالبة لذلك أخذنا القيمة المطلقة من أجل حساب الحجم.

تمرين 6 بين أن النقط الأربع:

$P(2,4,3)$ $Q(-2,1,4)$ $R(1,2,5)$ $S(-5,0,3)$

واقعة في مستو واحد.

الحل: أي لنثبت أن:

$(A,B,C) = 0$

$$(A,B,C) = \begin{vmatrix} -4 & -3 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ -7 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

النقط الأربع واقعة في مستو واحد.

المستقيم والمستوي في $\mathbb{R}^3$

المستقيم المعادلة الاتجاهية $\vec{R} = \vec{R}_0 + t\vec{A}$ حيث $\vec{A}(a_1, a_2, a_3)$

وبالتالي المعادلات الوسيطية:

$$x = x_0 + ta_1$$
$$y = y_0 + ta_2$$
$$z = z_0 + ta_3$$

وبالتالي المعادلات المتناسبة للخط المستقيم هي:

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

مثال 1: أوجد معادلة المستقيم المار من $B_1(2,0,4)$ و $B_2(2,2,2)$

وتحقق أن $D(2,-2,6)$ تقع عليه.

الحل: 1)

~~$(x,y,z)=(2,0,4)+$~~

$$R_0 = oB_1 = (2,0,4)$$

$$A = B_1B_2 = (0,2,-2)$$

$$R = R_0 + tA$$

$$(x,y,z) = (2,0,4) + (0,2t,-2t) = (2,2t,4-2t)$$

* المعادلات الوسيطة للخط المستقيم

$$\Rightarrow x = 2,\quad y = 2t,\quad z = 4-2t$$

فتكون المعادلات المتجانسة للخط المستقيم

$$x=2 : \frac{y}{2} = \frac{z-4}{-2}$$

نلاحظ أن الخط واقع في المستوي $x=2$.

2) نعوض إحداثيات D في المعادلات السابقة *

$2=2$

$-2=2t \Rightarrow t=-1$

$6 \overset{?}{=} 4-2(-1)$ ✓ تحقق

$4+2=6$

$\Rightarrow$ D تنتمي للمستقيم.

مثال 2: أوجد المعادلة الاتجاهية للخط المستقيم المار من النقطتين $P(1,-2,1)$ و $Q(3,1,1)$. ثم أوجد المعادلات الوسيطية والمعادلات المتجانسة لهذا الخط.

الحل:

$$R_0 = oP = (1,-2,1)$$

$$A = PQ = (2,3,0)$$

المعادلة الاتجاهية

$$R = R_0 + tA$$

$$(x,y,z) = (1,-2,1) + (2t,3t,0) = (1+2t,-2+3t,1)$$

المعادلات الوسيطية

$x = 1 + 2t$

$y = -2 + 3t$

$z = 1$

بحذف الوسيط t نحصل على المعادلات المتماثلة:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} ; \quad z = 1$$

الخط واقع في المستوي $z=1$

مثال 3| أوجد المعادلات الوسيطية للخط المار من النقطة $(-1,3,-2)$ والعمودي على المتجهين

$A = 3i + 4j + k$

$B = i + 2j$

الحل: بما أن الخط يتعامد كلاً من المتجهين A,B فهو يوازي متجه الجداء الخارجي لهما حيث:

$$A \times B = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2i + j + 2k$$

وبالتالي المعادلات الوسيطية نحصل عليها من المعادلة الاتجاهية:

$$R = R_0 + t(A \times B)$$

$R_0 = (-1,3,-2)$

$(x,y,z) = (-1,3,-2) + t(-2,1,2) = (-1-2t, 3+t, -2+2t)$

والمعادلات الوسيطية هي:

$x = -1 - 2t$

$y = 3 + t$

$z = -2 + 2t$

مثال 4| أوجد نقطة تقاطع الخطين المعرفين بالمعادلتين الاتجاهيتين:

$$\left.\begin{array}{l} R_1 = i - j + 2k + t(i + j + k) \\ R_2 = 3i - 3j + k + t^*(-i + 3j + 4k) \end{array}\right\} \quad -\infty < t^* < +\infty$$

الحل: يجب أن نجد قيمتي t, t^* بحيث تكون $R_1 = R_2$

وإذا لم توجد هذه القيم فإن الخطين لا يتقاطعان.

$$R_1 = R_2$$

$$\Rightarrow (1+t, -1+t, 2+t) = (3-t^*, -3+3t^*, 1+2t^*)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} 1+t = 3-t^* \\ -1+t = -3+3t^* \end{array}$$ بالطرح $2 = 6-4t^* \Rightarrow -4t^* = -4 \Rightarrow t^* = 1$

نبدل في احدى المعادلات

$$2+t = 1+2t^* \longrightarrow 2+t = 1+2 \Rightarrow t = 3-2 = 1$$

نبدل في إحداهما

وبالتالي نقطة التقاطع هي:

$$(2, 0, 3)$$

الزاوية بين خطين

الزاوية بين خطين هي الزاوية بين المتجهين الموازيين للخطين المستقيمين.

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}|\cdot|\vec{B}|}$$

مثال

ليكن L_1 يوازي المتجه $A_1 = i+j+k$

و L_2 يوازي المتجه $A_2 = -i+3j+2k$

و θ الزاوية بين A_1 و A_2 عندئذٍ:

$$\cos\theta = \frac{A_1\cdot A_2}{|A_1|\cdot|A_2|} = \frac{(1)(-1)+(1)(3)+(1)(2)}{\sqrt{1+1+1}\cdot\sqrt{1+9+4}} = \frac{4}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{14}}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{4}{\sqrt{42}}$$

وبالتالي الزاوية بين الخطين L_1 و L_2 هي:

$$\theta = \arccos\left(\frac{4}{\sqrt{42}}\right)$$

بعد نقطة عن مستقيم

$$d = \frac{|P_0P \times A|}{|A|}$$

بعد نقطة P عن المستقيم L الموازي للمتجه A

حيث P_0 نقطة من L.

مثال ١ أوجد بعد النقطة $P: (2,3,6)$ عن الخط L المعطى بالمعادلة الاتجاهية:

$$R = \underbrace{(3i - j + 4k)}_{R_0} + t\underbrace{(i - 2j + k)}_{A}$$

الحل:

P_0 نقطة ما من L: نختار P_0 الموافقة للقيمة $t=0$

$$P_0\ (3, -1, 4)$$

$$P_0P = (2-3, 3+1, 6-4) = (-1, 4, 2)$$

$$P_0P \times A = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 8i + 3j - 2k$$

$$\Rightarrow |P_0P \times A| = \sqrt{64 + 9 + 4} = \sqrt{77}$$

ولدينا: $|A| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$

$$\Rightarrow d = \frac{|P_0P \times A|}{|A|} = \frac{\sqrt{77}}{\sqrt{6}}$$

مثال ٢ أوجد المسافة بين الخط المستقيم L المعطى بالمعادلة $R = R_0 + tA$ ونقطة الأصل إذا اعتبرنا أن L لا يمر من نقطة الأصل.

الحل: نختار نقطة من الخط L بحيث متجه موضعها عمودي على الخط L فتكون المسافة من هذه النقطة من المستقيم حتى إلى نقطة الأصل هي المسافة المطلوبة في المسألة.
(أقصر بعد لأنه عمودي متجه موضعها)

نفرض $\vec{R}^*$ متجه الموضع للنقطة المختارة و $t=t_0$ قيمة الوسيط المواف[illegible]

فيكون :

$$R^* = R_0 + t_0 A$$

"عمودي على الخط L باعتبارة عمودي على A"

- بأخذ الجداء السلمي نضرب داخلياً بـ A :

$$A R^* = AR_0 + t_0 AA \Rightarrow 0 = AR_0 + t_0 AA$$

$$\Rightarrow t_0 = \frac{-AR_0}{A.A}$$

فيكون متجه الموضع للنقطة المطلوبة :

$$R^* = R_0 + \left[\frac{-AR_0}{A.A}\right] A$$

وبالتالي البعد بين الخط L ونقطة الأصل يعطى بالعلاقة :

$$d = |R^*|$$

معادلة المستوي

لإيجاد معادلة مستوي : نقطة من المستوي ومتجه عمودي عليه "متجه الجداء الخارجي"

معادلة المستوي :

$$A(R - R_0) = 0$$

$$a_1(x - x_0) + a_2(y - y_0) + a_3(z - z_0) = 0$$

معاملات المتجه A العمودي على المستوي ويسمى المتجه الناظم على المستوي

مثال ١ أوجد معادلة المستوي المار من النقطة $(2,-3,5)$ والعمودي على الخط المار بالنقطتين $(3,1,2)$ و $(-2,3,4)$

الحل :

$$\vec{A}(3-(-2), 1-3, 2-4) \Rightarrow \vec{A} = (5,-2,-2)$$

$$a_1(x - x_0) + a_2(y - y_0) + a_3(z - z_0) = 0$$

$$5(x-2) - 2(y+3) - 2(z-5) = 0$$

يكمل التابع

$$5x - 10 - 2y - 6 - 2z + 10 = 0$$

$$5x - 2y - 2z - 6 = 0$$

معادلة المستوي المار بالنقاط:

$P(-2,1,3) \quad Q(1,2,-1) \quad R(-3,-2,1)$

الحل: نفرض A, B متجهين ممثلين بالقطعتين المستقيمتين الموجهتين QP, QR

$A = QP = (-2-1, 1-2, 3+1) = (-3, -1, 4)$

$B = QR = (-3-1, -2-2, 1+1) = (-4, -4, 2)$

وحيث إن كلاً من المتجهين يقع في المستوي المطلوب فإن المتجه الناظم على المستوي هو:

$$A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & -1 & 4 \\ -4 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 14i - 10j + 8k$$

والمستوي يمر من نقطة نختارها P أو Q أو R.

مثلاً P: نضع معادلة المستوي:

$14(x+2) - 10(y-1) + 8(z-3) = 0$

أو: $7x - 5y + 4z + 7 = 0$

بعد نقطة عن مستوي

$$d = \frac{|A \cdot P_0P|}{|A|}$$

حيث P_0 نقطة معطاه

P اختيارية في المستوي

A ناظم المستوي

مثال ١: أوجد المسافة من النقطة $(2,4,5)$ إلى المستوي:

$2x - y + 2z + 6 = 0$

الحل: $P_0(2,4,5)$

نختار نقطة ما في المستوي بأخذ $x = -1$، $y = 2$ مثلاً فنجد

$-2 - 2 + 2z + 6 = 0 \Rightarrow 2z = -2 \Rightarrow z = -1$

فتكون $P(-1,2,-1)$ نقطة في المستوي

$P_0P = (-3, -2, -6)$

من معادلة المستوي نستنتج المتجه الناظم على المستوي:

$A = 2i - j + 2k$

$$d = \frac{|A \cdot P_0P|}{|A|} = \frac{|(2)(-3) + (-1)(-2) + (2)(-6)|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{16}{3}$$

تمارين

تمرين ١ إذا وصلت نقطة منتصف الأضلاع المتجاورة لأي شكل رباعي بخطوط مستقيمة فأثبت أن الشكل الرباعي الناتج متوازي أضلاع.

الحل:

ليكن ABCD شكلاً رباعياً

و P, Q, R, S نقط منتصف أضلاعه

عندئذ:

$$\vec{PQ} = \frac{1}{2}(\vec{A} + \vec{B})$$

$$\vec{QR} = \frac{1}{2}(\vec{B} + \vec{C})$$

$$\vec{RS} = \frac{1}{2}(\vec{C} + \vec{D})$$

$$\vec{SP} = \frac{1}{2}(\vec{D} + \vec{A})$$

وحيث أن: $A + B + C + D = 0$ «واضح»

فإن:

$$\vec{QR} = \frac{1}{2}(\vec{B} + \vec{C}) = -\frac{1}{2}(\vec{D} + \vec{A}) = \vec{PS}$$

$$\vec{PQ} = \frac{1}{2}(\vec{A} + \vec{B}) = -\frac{1}{2}(\vec{C} + \vec{D}) = \vec{SR}$$

وبالتالي $\vec{QR}$, $\vec{PS}$ المتقابلان متطابقان ومتوازيان

وكذلك $\vec{SR}$, $\vec{PQ}$ " " "

تمرين 2 نفرض:

$r_1 = 3i - 2j + k$

$r_2 = 2i - 4j - 3k$

$r_3 = -i + 2j + 2k$

...متجهات والمطلوب أوجد طويلة المتجهات :

1) r_3 2) $r_1+r_2+r_3$ 3) $2r_1-3r_2-5r_3$

الحل :

1) $|r_3| = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$

2) $r_1+r_2+r_3 = (-1+2+3,\ 2-4-2,\ 2-3+1)$

$= (4,-4,0) = 4i-4j$

$\Rightarrow |r_1+r_2+r_3| = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

3) $2r_1-3r_2-5r_3 = 2(3,-2,1)-3(2,-4,-3)-5(-1,2,2)$

$= (6-6+5,\ -4+12-10,\ 2+9-10) = (5,-2,1)$

$\Rightarrow |2r_1-3r_2-5r_3| = \sqrt{25+4+1} = \sqrt{30}$

تمرين 3 إذا كان

$r_1 = 2i-j+k$ $r_2 = i+3j-2k$

$r_3 = -2i+j-3k$ $r_4 = 3i+2j+5k$

أربع متجهات في الفضاء المتجهي ، والمطلوب أوجد المقادير العددية a,b,c

حيث : $r_4 = ar_1+br_2+cr_3$

الحل :

$(3,2,5) = (2a,-a,a)+(b,3b,-2b)+(-2c,c,-3c)$

$(3,2,5) = (2a+b-2c,\ -a+3b+c,\ a-2b-3c)$

$\Rightarrow$ $2a+b-2c = 3$ (1

$-a+3b+c = 2$ (2

$a-2b-3c = 5$ (3

وبالحل نجد : $c=-3$

$b=1$

$a=-2$

أي أن : $r_4 = -2r_1+r_2-3r_3$

تمرين 4 أوجد متجه الوحدة الموازي لمحصلة (مجموع) المتجهين:

$\vec{r_1} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$ $\quad\quad$ $\vec{r_2} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$

الحل: محصلة المتجهين هي متجه R:

$$\vec{R} = \vec{r_1} + \vec{r_2} = (2\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}) + (\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}) = 3\vec{i} + 6\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\Rightarrow |\vec{R}| = \sqrt{9 + 36 + 4} = \sqrt{49} = 7$$

وبالتالي متجه الوحدة الموازي للمتجه R يعطى بالعلاقة:

$$\frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} = \frac{3\vec{i} + 6\vec{j} - 2\vec{k}}{7} = \frac{3}{7}\vec{i} + \frac{6}{7}\vec{j} - \frac{2}{7}\vec{k}$$

تمرين 5 إذا كان

$$A = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}$$

$$B = B_1\vec{i} + B_2\vec{j} + B_3\vec{k}$$

أثبت أن:

$$A.B = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$$

الحل:

$$\vec{A}.\vec{B} = (A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k})(B_1\vec{i} + B_2\vec{j} + B_3\vec{k})$$

$$= A_1\vec{i}(B_1\vec{i} + B_2\vec{j} + B_3\vec{k}) + A_2\vec{j}(B_1\vec{i} + B_2\vec{j} + B_3\vec{k}) + A_3\vec{k}(B_1\vec{i} + B_2\vec{j} + B_3\vec{k})$$

$$= A_1B_1\,\vec{i}\vec{i} + A_1B_2\,\vec{i}.\vec{j} + A_1B_3\,\vec{i}.\vec{k} + A_2B_1\,\vec{j}.\vec{i} + A_2B_2\,\vec{j}.\vec{j} + A_2B_3\,\vec{j}.\vec{k} + A_3B_1\,\vec{k}\vec{i} + A_3B_2\,\vec{k}\vec{j} + A_3B_3\,\vec{k}.\vec{k}$$

ونعلم أن:

$$\vec{i}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{j} = \vec{k}.\vec{k} = 1$$

$$\vec{i}.\vec{j} = \vec{i}.\vec{k} = \vec{j}.\vec{k} = 0$$

ومنه فإن:

$$\vec{A}.\vec{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$$

6) أوجد الزاوية بين المتجهين:

$\vec{A}=2\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ $\qquad$ $\vec{B}=6\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$

الحل: لدينا: $\vec{A}.\vec{B}=|\vec{A}|.|\vec{B}|\cos(\underbrace{\vec{A},\vec{B}}_{\theta})$

$|\vec{A}|=\sqrt{4+4+1}=\sqrt{9}=3$

$|\vec{B}|=\sqrt{36+9+4}=\sqrt{49}=7$

$\vec{A}.\vec{B}=(2)(6)+(2)(-3)+(-1)(2)=12-6-2=4$

$\Rightarrow \cos\theta=\dfrac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}|.|\vec{B}|}=\dfrac{4}{3\times 7}=\dfrac{4}{21} \Rightarrow \theta=\arccos\dfrac{4}{21}$

تمرين 7) أوجد α بحيث يكون المتجهين:

$\vec{A}=2\vec{i}+\alpha\vec{j}+\vec{k}$ $\qquad$ $\vec{B}=4\vec{i}-2\vec{j}-2\vec{k}$

متعامدين.

الحل: حتى يكون المتجهان متعامدان يتحقق: $\vec{A}.\vec{B}=0$

$\vec{A}.\vec{B}=(2)(4)+(\alpha)(-2)+(1)(-2)=8-2\alpha-2=0$

$\Rightarrow -2\alpha=-6 \Rightarrow \alpha=3$

تمرين 8) أوجد الزاوية التي يصنعها المتجه $\vec{A}=3\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k}$ مع الاتجاه الموجب للمحاور الإحداثية.

الحل: لتكن α,β,γ هي الزوايا التي يصنعها المتجه A مع الاتجاه الموجب للمحاور الإحداثية x,y,z فيكون:

توسع بالحل كان

$\vec{i}=(1,0,0)$

$\vec{A}.\vec{i}=|\vec{A}|.|\vec{i}|\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha=\dfrac{\vec{A}.\vec{i}}{|\vec{A}|.|\vec{i}|}$

$\vec{A}.\vec{i}=(3)(1)+(-6)(0)+(2)(0)=3$

$|\vec{i}|=\sqrt{1+0+0}=1$

$|\vec{A}|=\sqrt{9+36+4}=\sqrt{49}=7$

$\cos\alpha=\dfrac{3}{7} \Rightarrow \alpha=\arccos\dfrac{3}{7}$

(1)

Scanned by CamScanner

$$\cos\beta = \frac{y_A}{|\vec{A}|} = \frac{-6}{7} \Rightarrow \beta = \arccos\frac{-6}{7}$$

$$\cos\gamma = \frac{z_A}{|\vec{A}|} = \frac{2}{7} \Rightarrow \gamma = \arccos\frac{2}{7}$$

تمرين ٩ بين أن المتجهات:

$\vec{A} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$

$\vec{B} = \vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$

$\vec{C} = 2\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$

تكون مثلثاً قائم الزاوية.

الحل: نلاحظ أن $\vec{A} = \vec{B} + \vec{C}$ لذلك فإن هذه المتجهات تكون مثلثاً

$\vec{A}\cdot\vec{B} = (3)(1) + (-2)(-3) + (1)(5) = 14$

$\vec{A}\cdot\vec{C} = (3)(2) + (-2)(1) + (1)(-4) = 0$

$\vec{B}\cdot\vec{C} = (1)(2) + (-3)(1) + (5)(-4) = -21$

⇐ المتجهان A و C متعامدان والمثلث ABC قائم الزاوية.

تمرين ١٠ أوجد مسقط المتجه $A = i - 2j + k$ على المتجه

$B = 4i - 4j + 7k$

الحل: أولاً نوجد متجه الوحدة على B وهو:

$$\frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = \frac{4\vec{i} - 4\vec{j} + 7\vec{k}}{\sqrt{16+16+49}} = \frac{4\vec{i} - 4\vec{j} + 7\vec{k}}{\sqrt{81}} = \frac{4}{9}\vec{i} - \frac{4}{9}\vec{j} + \frac{7}{9}\vec{k}$$

فيكون مسقط A على المتجه B هو:

$$\vec{A}\cdot\frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = (i - 2j + k)\left(\frac{4}{9}\vec{i} - \frac{4}{9}\vec{j} + \frac{7}{9}\vec{k}\right)$$

$$= (1)\left(\frac{4}{9}\right) + (-2)\left(-\frac{4}{9}\right) + (1)\left(\frac{7}{9}\right) = \frac{4}{9} + \frac{8}{9} + \frac{7}{9} = \frac{19}{9}$$

تمرين ١١ برهن قانون الجيوب للمثلثات المستوية.

الحل: نفرض المتجهات $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ تمثل أضلاع المثلث abc

فيكون:

$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = 0$$

نضرب العلاقة خارجياً بـ $\vec{A}$:

$$\vec{A}\times(\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}) = \underbrace{\vec{A}\times 0}_{0}$$

$$\underbrace{(\vec{A}\times\vec{A})}_{0} + (\vec{A}\times\vec{B}) + (\vec{A}\times\vec{C}) = 0$$

$$\Rightarrow (\vec{A}\times\vec{B}) + (\vec{A}\times\vec{C}) = 0 \Rightarrow \vec{A}\times\vec{B} = -(\vec{A}\times\vec{C})$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{A}\times\vec{B} = \vec{C}\times\vec{A}}$$

نضرب العلاقة السابقة $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}=0$ خارجياً بـ $\vec{B}$:

$$\vec{B}\times(\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}) = 0$$

$$(\vec{B}\times\vec{A}) + \underbrace{(\vec{B}\times\vec{B})}_{0} + (\vec{B}\times\vec{C}) = 0$$

$$\Rightarrow (\vec{B}\times\vec{A}) + (\vec{B}\times\vec{C}) = 0 \Rightarrow (\vec{B}\times\vec{C}) = -(\vec{B}\times\vec{A})$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}\times\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B}}$$

فنحصل على :

$$\vec{A}\times\vec{B} = \vec{B}\times\vec{C} = \vec{C}\times\vec{A}$$

$$\Rightarrow AB\sin c = BC\sin a = CA\sin b$$

نقسم على ABC

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\sin c}{C} = \frac{\sin a}{A} = \frac{\sin b}{B}}$$

وهو م

تمرين 12 أوجد متجه الوحدة العمودي على مستوى المتجهين :

$A = 2i - 6j - 3k \qquad B = 4i + 3j - k$

الحل :

متجه عمودي على الـ المتجهين A, B

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -6 & -3 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 15\vec{i} - 10\vec{j} + 30\vec{k}$$

وكذلك المتجه $B\times A = -(A\times B)$

$$|\vec{A}\times\vec{B}| = \sqrt{225+100+900} = \sqrt{1225} = 35$$

فيكون متجه الوحدة العمودي على مستوى المتجهين

$$\vec{e}_{\vec{A}\times\vec{B}} = \frac{\vec{A}\times\vec{B}}{|\vec{A}\times\vec{B}|} = \frac{15\vec{i} - 10\vec{j} + 30\vec{k}}{35}$$

$$\vec{e}_{\vec{A}\times\vec{B}} = \frac{3}{7}\vec{i} - \frac{2}{7}\vec{j} + \frac{6}{7}\vec{k}$$

وكذلك متجه وحدة ثاني هو:

$$\vec{e}_{\vec{B}\times\vec{A}} = -\left(\frac{3}{7}\vec{i} - \frac{2}{7}\vec{j} + \frac{6}{7}\vec{k}\right)$$

تمرين 13 أوجد معادلات الخط المستقيم المار بالنقطتين:

$P(x_1, y_1, z_1)$ $Q(x_2, y_2, z_2)$

الحل: بفرض r_1, r_2 متجهي الموضع للنقطتين P, Q على الترتيب.

و r هو المتجه الموضع لأي نقطة R واقعة على الخط PQ.

وبالتالي يكون:

$$\begin{cases} PR = r - r_1 \\ PQ = r_2 - r_1 \end{cases}$$

$\hat{R} - r_P$, $r - r_1$: $\begin{cases} x_R - x_P \\ y_R - y_P \\ z_R - z_P \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} r_1 + PR = r \\ r_1 + PQ = r_2 \end{cases}$$

لكن $PR = t\,PQ$ حيث t وسيط عددي ، "واضح"

$$\Rightarrow \begin{cases} r_1 + t\,PQ = r \quad (1 \\ r_1 + PQ = r_2 \quad (2 \Rightarrow PQ = r_2 - r_1 \end{cases}$$

نبدل في (1

$$r_1 + t(r_2 - r_1) = r$$

$$\Rightarrow r - r_1 = t(r_2 - r_1)$$

وهي المعادلات المتجهية للخط المطلوب

...نسبة للإحداثيات الديكارتية فإن المعادلات الوسيطية للخط هي:

$$\begin{cases}(x-x_1)=t(x_2-x_1)\\(y-y_1)=t(y_2-y_1)\\(z-z_1)=t(z_2-z_1)\end{cases}$$ المعادلات الوسيطية

وبحذف t من المعادلات الوسيطية نحصل على المعادلات الديكارتية للخط المستقيم وهي:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

تمرين 14 أوجد معادلة المستوي العمودي على المتجه $\vec{A}=2\vec{i}+3\vec{j}+6\vec{k}$ ويمر من نقطة نهاية المتجه $\vec{B}=\vec{i}+5\vec{j}+3\vec{k}$ ثم أوجد بعد نقطة الأصل عن هذا المستوي.

الحل: لتكن P نقطة نهاية المتجه $\vec{B}$

ولتكن Q نقطة من المستوي متجه موضعها هو $\vec{R}$

فيكون:

$$\vec{PQ}=\vec{B}-\vec{R}$$

$-\vec{R}$, P, $\vec{B}$, Q, $\vec{R}$, PQ

$\vec{PQ}=\vec{B}-\vec{R}$

وهذا المتجه سيكون عمودي على A ضمناً؛ لأن Q من المستوي و P يمر منها المستوي و A عمودي على المستوي.

فيكون:

$$(\vec{B}-\vec{R})A=0$$

$$\Rightarrow \vec{B}\vec{A}-\vec{R}\vec{A}=0$$ نفرض $\vec{R}(x,y,z)$

$$\Rightarrow \vec{B}\vec{A}=\vec{R}\vec{A}$$

$$\Rightarrow (\vec{i}+5\vec{j}+3\vec{k})(2\vec{i}+3\vec{j}+6\vec{k})=(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})(2\vec{i}+3\vec{j}+6\vec{k})$$

$$\Rightarrow (1)(2)+(+5)(3)+(3)(6)=(x)(2)+(y)(3)+(z)(6)$$

$$\Rightarrow 2+15+18=2x+3y+6z$$

...

$\Rightarrow 2x + 3y + 6z = 35$

- الآن لنوجد بعد نقطة الأصل عن هذا المستوي :

وهو عبارة عن مسقط $\vec{B}$ على المتجه $\vec{A}$

لنوجد إذاً متجه الوحدة لـ $\vec{A}$:

$$\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{2\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}}{\sqrt{4+9+36}} = \frac{2}{7}\vec{i} + \frac{3}{7}\vec{j} + \frac{6}{7}\vec{k}$$

وبالتالي مسقط $\vec{B}$ على $\vec{A}$:

$$\vec{B} \cdot \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = (1,5,3)\left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right) = (1)\left(\frac{2}{7}\right) + (5)\left(\frac{3}{7}\right) + (3)\left(\frac{6}{7}\right)$$

$$= \frac{2}{7} + \frac{15}{7} + \frac{18}{7} = \frac{35}{7} = 5$$

تمرين 15 إذا كان :

$\vec{A} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ $(3, -1, 2)$

$\vec{B} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ $(2, 1, -1)$

$\vec{C} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ $(1, -2, 2)$

أوجد :

① $(A \times B) \times C$ ② $A \times (B \times C)$

الحل :

① $A \times B = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 7\vec{j} + 5\vec{k}$

$(A \times B) \times C = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 7 & 5 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 24\vec{i} + 7\vec{j} - 5\vec{k}$

② $B \times C = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -5\vec{j} - 5\vec{k}$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & -5 \end{vmatrix} = 15\vec{i}+15\vec{j}-15\vec{k}$$

نلاحظ أن: $(A\times B)\times C \neq A\times(B\times C)$

تمرين 16 لدينا:

$\vec{A} = 2\vec{i}-3\vec{j}-\vec{k}$ $(2,-3,-1)$

$\vec{B} = \vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}$ $(1,4,-2)$

أوجد: $(\vec{A}+\vec{B})\times(\vec{A}-\vec{B})$

الحل: **طريقة 1**

$\vec{A}+\vec{B} = (2+1)\vec{i}+(-3+4)\vec{j}+(-1-2)\vec{k}$

$= 3\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$ $(3,1,-3)$

$\vec{A}-\vec{B} = (2-1)\vec{i}+(-3-4)\vec{j}+(-1+2)\vec{k} =$

$= \vec{i}-7\vec{j}+\vec{k}$ $(1,-7,1)$

$$(\vec{A}+\vec{B})\times(\vec{A}-\vec{B}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & -7 & 1 \end{vmatrix} = 20\vec{i}-6\vec{j}-22\vec{k}$$

طريقة 2

$(\vec{A}+\vec{B})\times(\vec{A}-\vec{B}) = \vec{A}\times(\vec{A}-\vec{B}) + \vec{B}\times(\vec{A}-\vec{B})$

$= (\vec{A}\times\vec{A}) - (\vec{A}\times\vec{B}) + (\vec{B}\times\vec{A}) - (\vec{B}\times\vec{B})$

($\vec{A}\times\vec{A} = 0$, $\vec{B}\times\vec{B} = 0$)

$= -\vec{A}\times\vec{B} - \vec{A}\times\vec{B} = -2(\vec{A}\times\vec{B})$

$$= -2\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -2(10\vec{i}+3\vec{j}+11\vec{k})$$

$= -20\vec{i}-6\vec{j}-22\vec{k}$

تمرين 17 أثبت أن :

$$A \times (B \times C) + B \times (C \times A) + C \times (A \times B) = 0$$

الحل : لدينا :

$$A \times (B \times C) = B(AC) - C(AB)$$

$$B \times (C \times A) = C(B.A) - A(BC)$$

$$C \times (A \times B) = A(C.B) - B(CA)$$

نبدل في الطرف الأول ونجمع الحدود نحصل على المطلوب.